résoudre l'expression
ci-dessous par simplification

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)} = ?$$

question qui avait été posée aux élèves de classe préparatoire MPSI (mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur)

---------- Q U E S T I O N ----------

$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ = ? en simplifiant

---------- R É P O N S E ----------

$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = ?$

$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = x$

soit $u = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$

soit $v = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$

en conséquence $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = x$ devient:

$u - v = x$

$(u - v)^3 = x^3$

$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 = x^3$

$u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 = x^3$

$u^3 - v^3 - (3u^2v - 3uv^2) = x^3$

$u^3 - v^3 - (3uv(u - v)) = x^3$

$u^3 - v^3 - 3uv(u - v) = x^3$

----- $u^3 - v^3$ -----

comme $u = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$ alors $u^3 = (\sqrt{5} + 2)$

comme $v = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ alors $v^3 = (\sqrt{5} - 2)$

en conséquence $u^3 - v^3 - 3uv(u - v) = x^3$ devient:

$(\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3uv(u - v) = x^3$

$\sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 - 3uv(u - v) = x^3$

$4 - 3uv(u - v) = x^3$

----- uv -----

$uv = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$

$uv = \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)}$

$uv = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$

$uv = \sqrt[3]{(5 - 4)}$

$uv = \sqrt[3]{(1)}$

$uv = 1$

en conséquence $4 - 3uv(u - v) = x^3$ devient:

$4 - 3 \cdot 1 \cdot (u - v) = x^3$

$4 - 3(u - v) = x^3$

----- $3(u - v)$ -----

comme $u - v = x$ (voir plus haut)

en conséquence $4 - 3(u - v) = x^3$ devient:

$4 - 3x = x^3$

$x^3 + 3x - 4 = 0$

$x^3 + 3x - 4 = 0$ est basé sur le modèle $x^3 + px + q = 0$ avec:

$p = 3$

$q = -4$

formule de TARTAGLIA/CARDANO:

note (rappel): racine cubique de $n = n^{(1/3)}$

$x = [-q/2 + \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)}]^{(1/3)} +$

$[-q/2 - \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)}]^{(1/3)}$

application de la formule:

$x = [-(-4)/2 + \sqrt{((-4)^2/4 + (3)^3/27)}]^{(1/3)} +$

$[-(-4)/2 - \sqrt{((-4)^2/4 + (3)^3/27)}]^{(1/3)}$

$x = 1{,}61803 + (-0{,}61803)$

$x = 1$

----- résultat final ----

$\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)} = 1$

note: la formule de TARTAGLIA/CARDANO aurait dû être évitée en proposant une solution évidente à l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$ (avec $x = 1$)