$$5^x = 5x + 15$$

$x = ?$ avec la fonction W de LAMBERT

---------- Q U E S T I O N ----------

$5^x = 5x + 15$

$x = ?$

(réponse évidente: $x = 2$; mais c'est le raisonnement avec l'utilisation de la fonction W de LAMBERT (fonction appelée également "Oméga") qui est l'atout de la résolution de cette équation)

---------- R É P O N S E ----------

$5^x = 5x + 15$

rappel de l'objectif: $\boxed{a \cdot e^a}$ car $\boxed{W(a \cdot e^a) = a}$

$5^x = 5 \cdot (x + 3)$

$5^x/5 = x + 3$

$5^{(x - 1)} = x + 3$

$1 = (x + 3)/5^{(x - 1)}$

rappel: $a^b = 1/a^{(-b)}$ et donc $5^{(x - 1)} = 1/5^{(1 - x)}$

$1 = (x + 3) \cdot (1/5^{(-x + 1)})$

1 = (x + 3)·5^(-x + 1)

(simple permutation)

(x + 3)·5^(-x + 1) = 1

-1·[(x + 3)·5^(-x + 1)] = -1

(-x - 3)·5^(1 + x) = -1

5^(-4)·[(-x - 3)·5^(-x + 1)] = -5^(-4)

(-x - 3)·5^(-4)·5^(-x + 1) = -5^(-4)

(-x - 3)·5^(-x + 1 - 4) = -5^(-4)

(-x - 3)·5^(-x - 3) = -5^(-4)

rappel: a = b^log[b](a) ou bien a = e^ln(a) et donc 5^(-x - 3) = e^ln(5^(-x - 3))

rappel: log[b](a^n) = n·log[b](a) et donc e^ln(5^(-x - 3)) = e^(-x - 3)·ln(5)

(-x - 3)·e^(-x - 3)·ln(5) = -5^(-4)

ln(5)·[(-x - 3)·e^(-x - 3)·ln(5)] = ln(5)·[-5^(-4)]

(-x - 3)·ln(5)·e^(-x - 3)·ln(5) = -5^(-4)·ln(5)

W[(-x - 3)·ln(5)·e^(-x - 3)·ln(5)] = W[-5^(-4)·ln(5)] rappel: $W(a \cdot e^a) = a$ et donc $W[(-x - 3) \cdot \ln(5) \cdot e^{(-x - 3) \cdot \ln(5)}] = (-x - 3) \cdot \ln(5)$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = W(-5^{(-4)} \cdot \ln(5))$

rappel: $a^n = a^1 \cdot a^{(n-1)} = a \cdot a^{(n-1)}$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = W(-5 \cdot 5^{(-5)} \cdot \ln(5))$

rappel: $5^{(-5)} = e^{\ln(5^{(-5)})}$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = W(-5 \cdot e^{\ln(5^{(-5)})} \cdot \ln(5))$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = W(-5 \cdot e^{(-5) \cdot \ln(5)} \cdot \ln(5))$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = W(-5 \cdot \ln(5) \cdot e^{(-5) \cdot \ln(5)})$

rappel: $W(a \cdot e^a) = a$ et donc $W(-5 \cdot \ln(5) \cdot e^{(-5) \cdot \ln(5)}) = -5 \cdot \ln(5)$

$(-x - 3) \cdot \ln(5) = -5 \cdot \ln(5)$

$-x - 3 = -5$

$-x = -2$

$\boxed{x = 2}$