Que vaut x ?

$$(1/x)^2 - (1/x)^3 = 80$$

---------- Q U E S T I O N ----------

$(1/x)^2 - (1/x)^3 = 80$

$x = ?$

---------- R É P O N S E ----------

La solution #1 profite du fait que 80 est la somme du carré de 4 et du cube de 4 tandis que la solution #2 est universelle et applique la formule de Cardan/Tartaglia.

----- solution #1 -----

$(1/x)^2 - (1/x)^3 = 80$

note: $80 = 4^2 + 4^3$

$(1/x)^2 - (1/x)^3 - 4^2 - 4^3 = 0$

$(1/x)^2 - 4^2 - (1/x)^3 - 4^3 = 0$

$((1/x)^2 - 4^2) - ((1/x)^3 + 4^3) = 0$

rappel: $a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$

$(1/x + 4)\cdot(1/x - 4) - (1/x + 4)\cdot(1/x^2 - 4/x + 16) = 0$

$(1/x + 4)\cdot((1/x - 4) - (1/x^2 - 4/x + 16)) = 0$

$(1/x + 4)\cdot(1/x - 4 - 1/x^2 + 4/x - 16) = 0$

$(1/x + 4)\cdot(-1/x^2 + 5/x - 20) = 0$

----- $1/x + 4 = 0$ -----

$1/x + 4 = 0$

$1/x = -4$

$-4x = 1$

(voir page suivante)

$$\boxed{x = -1/4 \quad \text{or} \quad x = -0.25}$$

----- $-1/x^2 + 5/x - 20 = 0$ -----

$-1/x^2 + 5/x - 20 = 0$

let $k = 1/x$

$-k^2 + 5k - 20 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-20) = 25 - 80 = -55$

$\sqrt{\Delta} = +i\sqrt{55}$ and $\sqrt{\Delta} = -i\sqrt{55}$

cas $\sqrt{\Delta} = +i\sqrt{55}$:

- $k = (-5 + i\sqrt{55})/2\cdot(-1) = (-5 + i\sqrt{55})/(-2) = 5/2 - i\sqrt{55}/2$
- $k = 1/x$
- $(5/2 - i\sqrt{55}/2) = 1/x$
- $x = 1/(5/2 - i\sqrt{55}/2)$
- $x = 1\cdot(5/2 + i\sqrt{55}/2)/[(5/2 - i\sqrt{55}/2)\cdot(5/2 + i\sqrt{55}/2)]$
- $x = (5/2 + i\sqrt{55}/2)/[(5/2)^2 - (i\sqrt{55}/2)^2]$
- $x = (5/2 + i\sqrt{55}/2)/(25/4 + 55/4)$
- $x = (5/2 + i\sqrt{55}/2)/(80/4)$
- $x = (5/2 + i\sqrt{55}/2)/20$
- $x = 5/2/20 + i\sqrt{55}/2/20$
- $x = 1/8 + i\sqrt{55}/40$

$$\boxed{x = 1/8 + i\sqrt{55}/40}$$

cas $\sqrt{\Delta} = -i\sqrt{55}$:

- $k = (-5 - i\sqrt{55})/2\cdot(-1) = (-5 - i\sqrt{55})/(-2) = 5/2 + i\sqrt{55}/2$
- $k = 1/x$
- $(5/2 + i\sqrt{55}/2) = 1/x$

(voir page suivante)

- $x = 1/(5/2 + i\sqrt{55}/2)$
- $x = 1\cdot(5/2 - i\sqrt{55}/2)/[(5/2 + i\sqrt{55}/2)\cdot(5/2 - i\sqrt{55}/2)]$
- $x = (5/2 - i\sqrt{55}/2)/[(5/2)^2 - (i\sqrt{55}/2)^2]$
- $x = (5/2 - i\sqrt{55}/2)/(25/4 + 55/4)$
- $x = (5/2 - i\sqrt{55}/2)/(80/4)$
- $x = (5/2 - i\sqrt{55}/2)/20$
- $x = 5/2/20 - i\sqrt{55}/2/20$
- $x = 1/8 - i\sqrt{55}/40$

$$\boxed{x = 1/8 - i\sqrt{55}/40}$$

----- solution #2 -----

$(1/x)^2 - (1/x)^3 = 80$

$1/x^2 - 1/x^3 = 80$

$x/x^3 - 1/x^3 = 80$

$(x - 1)/x^3 = 80$

$x - 1 = 80x^3$

$80x^3 - x + 1 = 0$

$x^3 - x/80 + 1/80 = 0$

$x^3 - x/80 + 1/80 = 0$ est basé sur le modèle $x^3 + xk + q = 0$ avec:

$p = -1/80$

$q = 1/80$

application de la formule de Cardan/Tartaglia:

$x = [-q/2 + \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)}]^{(1/3)} +$

$\quad [-q/2 - \sqrt{(q^2/4 + p^3/27)}]^{(1/3)}$

(voir page suivante)

$$x = \left(-\frac{-1/80}{2} + \sqrt{\frac{(-1/80)^2}{4} + \frac{(1/80)^3}{27}}\right)^{1/3} +$$

$$\left(-\frac{-1/80}{2} - \sqrt{\frac{(-1/80)^2}{4} + \frac{(1/80)^3}{27}}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{x = -1/4 \quad \text{or} \quad x = -0.25}$$

----- Y a-t-il des racines dans C ? -----

Division euclidienne de ($80x^3 - x + 1 = 0$) par ($x + 1/4$)

$$(80x^3 + 0x^2 - x + 1) / (x + 1/4) = 80x^2 - 20x + 4$$

$$80x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$20x^2 - 5 + 1 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1 = 25 - 80 = -55$$

$\sqrt{\Delta} = +i\sqrt{55}$ et $\sqrt{\Delta} = -i\sqrt{55}$

- cas $\sqrt{\Delta} = +i\sqrt{55}$: $x = (-(-5) + i\sqrt{55})/2 \cdot 20 = 1/8 + i\sqrt{55}/40$

- cas $\sqrt{\Delta} = -i\sqrt{55}$: $x = (-(-5) - i\sqrt{55})/2 \cdot 20 = 1/8 - i\sqrt{55}/40$

$$\boxed{x = 1/8 + i\sqrt{55}/40}$$

$$\boxed{x = 1/8 - i\sqrt{55}/40}$$